

谈绕桩绳索的摩擦力

郭茂政

(黄冈师范学院 物理系, 湖北 黄冈 438000)

摘 要: 通过对绕桩绳索摩擦力的分析, 进一步说明在摩擦系数一定的情况下, 正压力是决定最大静摩擦力(或滑动摩擦力)的唯一因素。

关键词: 绕桩绳索; 包角; 等效摩擦力

中图分类号: O313

文献标识码: A

文章编号: 1009-9115 (2003) 05-0018-02

1 问题的提出

将绳索绕在一固定的木桩上, 在绳索的一端用一较小的拉力 T_0 , 则在另一端能产生很大的拉力 T , 绕的圈数愈多, 则 T 愈大。这是日常生活中常观察到的现象。于是有人就以此为例证, 认为在这种正压力变化的情况下, 最大静摩擦力(或滑动摩擦力)与接触面积的大小有关。

2 受力分析

如图1所示, 绳索与木桩(圆柱体)在 $\widehat{AB}$ 弧段上接触且无相对滑动, $\widehat{AB}$ 对应的圆心角 θ 称为包角, T_0 和 T 分别表示绳索在A点和B点处的张力, 设绳索与木桩间的静摩擦系数为 μ_0 。在绳 $\widehat{AB}$ 弧段截取弧元 ds , 其对应的包角为 $d\theta$, [1]如图2所

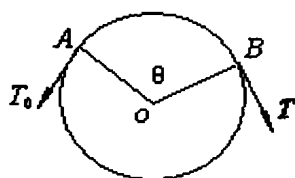


图1 绕桩绳索的张力

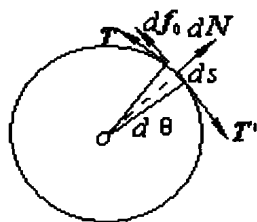


图2 摩擦力对张力分布的影响

示, T 和 T' 为弧元 ds 两端的张力, 设 $T' = T + dT$, dN 为木桩给弧元的支承力, df_0 为弧元 ds 所受的静摩擦力。根据质点平衡方程, 得

$$T + T' + dN + df_0 = 0 \quad (1)$$

将式(1)在切向和法向投影, 并考虑到

$$df_0 \leq df_{0\max} = \mu_0 dN \quad (2)$$

得

$$\text{切向} \quad -T \cos \frac{d\theta}{2} - \mu_0 dN + (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} \leq 0$$

$$\text{法向} \quad dN - T \sin \frac{d\theta}{2} - (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\text{因 } d\theta \text{ 很小, 所以 } \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \cos \frac{d\theta}{2} \approx 1,$$

并略去二阶无穷小量, 得

$$dN = T d\theta \quad (3)$$

$$\mu_0 dN \geq dT$$

由上二式消去 dN , 得 $\frac{dT}{T} \leq \mu_0 d\theta$ 。积分有

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} \leq \int_0^\theta \mu_0 d\theta, \text{ 得 } \ln \frac{T}{T_0} \leq \mu_0 \theta$$

$$\text{或 } T \leq T_0 e^{\mu_0 \theta} \quad (4)$$

B 处最大张力可达 $T_{\max} = T_0 e^{\mu_0 \theta}$, [2]此式表明,

张力随 θ 按指数增加, 故很容易做到让 $T > T_0$ 。

将式(4)代入式(3),

$$\text{得 } dN \leq T_0 e^{\mu_0 \theta} d\theta \quad (5)$$

$$\text{积分 } \int_0^N dN \leq \int_0^\theta T_0 e^{\mu_0 \theta} d\theta,$$

$$\text{有 } N \leq \frac{T_0}{\mu_0} (e^{\mu_0 \theta} - 1) \quad (6)$$

绳索所受到的等效支承力(即等效正压力)最

大可达 $N_{\max} = \frac{T_0}{\mu_0} (e^{\mu_0 \theta} - 1)$ 。

将式 (5) 代入式 (2), 得 $df_0 \leq \mu_0 T_0 e^{\mu_0 \theta} d\theta$ 。

积分 $\int_0^{f_0} df_0 \leq \int_0^{\theta} \mu_0 T_0 e^{\mu_0 \theta} d\theta$, 有

$$f_0 \leq T_0 (e^{\mu_0 \theta} - 1) \quad (7)$$

故绳索受到的最大等效静摩擦力 (等效摩擦力对圆心 O 点的矩与同木桩相接触的各弧段绳索所受摩擦力对该点的矩之和相等) 为

$$f_{0\max} = T_0 (e^{\mu_0 \theta} - 1)。$$

$$\text{即 } f_{0\max} = \mu_0 N_{\max} \quad (8)$$

显然, 当 μ_0 (或 μ) 一定时, 最大等效静摩擦力 (或等效滑动摩擦力) 与最大等效正压力成正比。

3 与面积无关的证明

首先, 保持绳索与木桩接触的纵向长度不变 (即包角 θ 不变) 而增加横向宽度, 从而增大接触面积。比喻用同样两条绳索并绕在木桩上, 保持 θ 不变, 则接触面积扩大一倍。同理, 有

$$T_{1\max} = T_{10} e^{\mu_0 \theta}, \quad T_{2\max} = T_{20} e^{\mu_0 \theta}。$$

又, 一端双绳总的张力 $T_0 = T_{10} + T_{20}$, 另一端双绳总的最大张力为 $T_{\max} = T_{1\max} + T_{2\max} = T_0 e^{\mu_0 \theta}$ 。显

然, 其总的最大等效静摩擦力 (或等效滑动摩擦力)

参考文献:

- [1] 赵凯华, 罗蔚英. 新概念物理教程·力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996. 72-73.
- [2] 漆安慎, 杜婵英. 普通物理学教程·力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997. 19-80.

$f_{0\max} = T_{\max} - T_0$ 不变。

其次, 保持绳索与木桩的接触面积不变, 而改绕半径不同的木桩 (即改变 θ 的大小)。比喻用同样的绳索绕在质料相同的较粗的木桩上, 保持接触面积不变, 则包角 θ 减小, 于是在一端拉力为 T_0 的同样情况下, 另一端的最大张力 $T_{\max}$ 减小, 则其最大等效静摩擦力 (或等效滑动摩擦力) 减少了。

所以, 绕桩绳索的最大等效静摩擦力 (或等效滑动摩擦力) 与其接触面积的大小无关。

4 结论

绕桩绳索的最大等效静摩擦力 (或等效滑动摩擦力) 与等效正压力成正比, 摩擦系数 μ_0 (或 μ) 为其比例系数。其等效正压力与摩擦系数 μ_0 (或 μ)、绳一端的张力 T_0 及包角 θ 有关, 与接触面积的大小无关。

目前较流行的一种理论认为, 物体间的实际接触面积是属于原子尺度的, 它只占总的几何接触面积的一个极微小的部分, 而摩擦力的出现是由于在原子接触的这些微小区域内原子之间的相互作用力。原子接触面积占几何接触面积的比例, 正比于法向力除以几何接触面积。因此, 当法向力增大一倍, 原子接触面积也增大一倍, 摩擦力便增大一倍, 这就是摩擦力正比于正压力的原因。但是, 如果几何接触面积增加一倍, 而法向力保持不变, 则原子接触面积占几何接触面积的比例减小一半, 但原子接触面积的实际面积不变, 因而摩擦力不变。对于非刚性的物体, 例如汽车轮胎等, 摩擦力的情况更为复杂。有关摩擦力的起因及微观机理, 尚有许多未知领域, 有待进一步探讨。

On Friction of Rope Wrapping Stump

GUO Mao-zheng

(Physics Department, Huanggang Teachers College, Hubei Huanggang 438000)

Abstract: According to the analysis of friction of rope wrapping stump, it makes farther explanation normal stress is the only factor in the judging of maximum static friction (or sliding friction force) under the circumstances of definite friction.

Key words: rope wrapping stump; center-of-circle angle; equivalence friction force

责任编辑、校对: 孙海祥